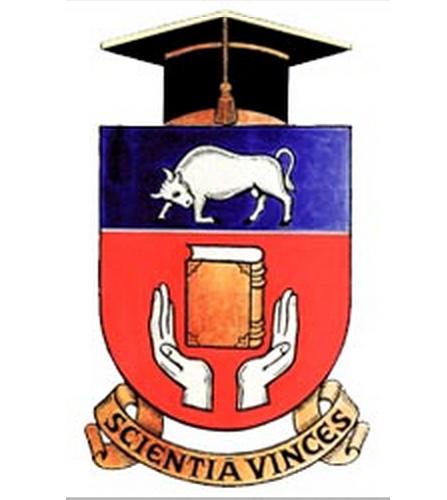
Universitatea de Stat din Tiraspol

Facultatea de Fizica Matematica si Informatica



**Practica de inițiere**

**cu tema:**

***“Limita funcției de o singură variabilă și de mai multe variabile reale”***

**Elaborat de:** Razloga Anastasia, studenta grupei 2MI

## Verificat: Cozma Dumitru, doc. hab., conf. univ.

**Chișinău 2021**

**Cuprins:**

1. Conceptul…………………………………………………………2
2. Compararea noțiunilor în cazul unei funcții de o variabilă și de mai multe variabile..............................................................................3-5
3. Stabilirea proprietăților comune, deosebiri, generalizări...............6
4. Indicarea unor aplicații ale temelor propuse..................................7-8
5. Reprezentarea cum utilizăm mijloacele TIC în studiul temei.......9-10
6. Formularea concluziilor generale...................................................11-12
7. Bibliografie.....................................................................................13

**1. Conceptul**

Conceptul de limită este conceptul de bază al analizei matematice. Multe economii sunt imposibile fără ea. Acest concept este foarte antic, bazat pe cercetări empirice. Teoria modernă este rezultatul sistematizării și evoluției acestor concepte. Matematicienii antici, cum ar fi Euclid și Aristotel, propun diverse căi pentru ca limita să existe.

Atât în natură cât și în societate, o multitudine de fenomene și procese se supun unor legi care pot fi modelate matematic în raport cu una sau mai multe variabile. Este nevoie de cunoașterea evoluției acestor fenomene, evoluție care exprimată cantitativ implică evidențierea unor creșteri sau descreșteri, a unor valori numerice între care acestea se manifestă, a unor continuități sau discontinuități. Aceste aspecte calitative și cantitative își pot găsi ilustrarea într-o reprezentare grafică, fapt care necesită studierea conceptelor de [funcții continue](https://ro.wikipedia.org/wiki/Func%C8%9Bie_continu%C4%83" \o "Funcție continuă) și [funcții derivabile](https://ro.wikipedia.org/wiki/Derivat%C4%83" \o "Derivată), care au ca element fundamental în definirea lor, noțiunea de limită a unei funcții într-un punct.

**2. Compararea noțiunilor în cazul unei funcții de o variabilă și de mai multe variabile.**

**Noțiune de limita unei funcții de o singură variabilă:**

Conceptul de limită a unei funcții într-un punct este folosit în studiul [continuității](https://ro.wikipedia.org/wiki/Continuitate), [derivatei](https://ro.wikipedia.org/wiki/Derivat%C4%83), [integralei](https://ro.wikipedia.org/wiki/Integral%C4%83" \o "Integrală) și alte studii. Considerând o [funcție](https://ro.wikipedia.org/wiki/Func%C8%9Bie" \o "Funcție)  {\displaystyle f:A\subset \mathbb {R} ^{1}\rightarrow \mathbb {R} ^{1}.\!}Se analizează comportamentul lui  atunci când **x** se apropie de o valoare reală fixată **xo**. Pentru aceasta se presupune că  este definită pentru orice **x** care se apropie de **xo**. Cu alte cuvinte, se presupune că [domeniul de definiție](https://ro.wikipedia.org/wiki/Domeniu_de_defini%C8%9Bie" \o "Domeniu de definiție)  conține o mulțime de forma {\displaystyle (x\_{0}-r,x\_{0})\cup (x\_{0},x\_{0}+r)\!} unde  .

***Definiție:*** Funcția **f** are limita **l**în punctul **xo** dacă pentru orice  {\displaystyle \epsilon >0\!} există un număr 𝝙=𝝙(x) {\displaystyle \delta =\delta (\epsilon )>0\!} astfel ca , ,   {\displaystyle |f(x)-l|<\epsilon ,\;\forall x\in A,\;x\neq x\_{0}\!}și  {\displaystyle |x-x\_{0}|<\delta .\!}

Faptul că funcția **f** are limita  **l** în punctul **xo** se notează:

{\displaystyle \lim \_{x\to x\_{0}}f(x)=l\!} sau  .

***Exemplu.*** Să se calculeze limita:

**= = = = = =**

***Definiţie:*** Orice interval cu centrul în  se numeşte *vecinătatea punctului* .

Dacă raza vecinătăţii este , atunci vecinătatea punctului  se mai numeşte *-vecinătate* a punctului  şi se notează .

Dacă nu este indicată raza vecinătăţii punctului , atunci vecinătatea punctului  se notează .

Dacă din vecinătatea  înlăturăm punctul , atunci obţinem *vecinătatea perforată*  a punctului , care se notează  sau .

***Definiţie:***  Punctul  se numeşte *punct limită* a mulţimii  dacă orice vecinătate a acestui punct conţine o infinitate de puncte din mulţimea .

*Exemple.* Fie 

Este evident că orice punct al  este punct de limită pentru el.

***Definiţie:*** Numărul  se numeşte  *limita funcţiei în punctul *, dacă orice şir  de valori a argumentului, care converge către , întotdeauna şirul  de valori a funcţiei converge către . (pe scurt ).

Se demonstreză că definiţiile după Heine şi Cauchy sînt echivalente.

Definiţia după Heine ne dă posibilitatea mai mare să stabilim cînd nu există limita funcţiei în punct, pentru aceasta e suficient să găsim 2 şiruri ce converg către , astfel încît şirurile respective de valori ale funcţiei nu tind către unul şi acelaşi număr.

**Noțiune de limita unei funcții de mai multe variabile:**

Considerăm funcția definită pe mulțimea și punctul sau care posedă proprietatea: în orice 𝝙- vecinătate a punctului există cel puțin un punct din mulțimea , diferit de .

***Definiție:*** Numărul A se numește limită a funcției în punctul , dacă pentru orice șir de puncte convergent către (), șirul respectiv de valori ale funcției converge către A.

Se notează: sau

Spre exemplu, funcția este definită pe tot planul. Să calculăm limita acestei funcții în punctul . Pentru orice șir de puncte , ce converge către punctul , avem .

Prin urmare, .

***Exemplu.*** Aflați limita funcției f(x,y) , f(x,y)=

**Rezolvare:**

**1.** Pentru x=0, y=3 numărătorul și numitorul fracției se transformă în 0.

**Notăm:** , atunci când

**2.** Dacă x=0, atunci f(x,y)=0, atunci

**Concluzie:** Funția are limită și limita ei este egală cu 3.

**3. Stabiliți proprietățile lor comune, deosebiri, generalizări.**

**Deosebiri:**

**1.** Limita funției de o singură variabilă analizează comportamentul lui ) atunci când **x** se apropie de o valoare reală fixată **xo**.  
  
**2.** În cazul limitei funcției de mai multe variabile reale numărul A se numește limită a funcției în punctul , dacă pentru orice șir de puncte convergent către (), șirul respectiv de valori ale funcției converge către A.  
  
**3.** Așa este reprezentată limita funcției de o singură variabilă reală , iar limita funcției de mai multe variabile reale va fi reprezentată în felul următor

**Asemănări:**

**4. Limita funcției de o singură variabilă reală** (Limita funcției după Cauchy)

Numărul  se numeşte *limita funcţiei * în punctul  (sau cînd ), dacă  astfel încît  ce satisface relaţia  are loc relaţia  şi vom scrie .

**Limita funcției de mai multe variabile reale** (Limita funcției la punctul A conform lui Cauchy) Un număr b se numește limita unei funcții în punctul A (sau pentru ), dacă pentru orice număr pozitiv există un număr pozitiv corespunzător astfel încât pentru orice punct din mulțimea acestă funcția este atribuită condiționat , inegalitatea este adevărată. Pentru a indica limita funcției în punctul , se folosește următoarea notație:

sau

(Aici( – coordonatele punctului A.)

**4. Indicați unele aplicații ale temelor propuse.**

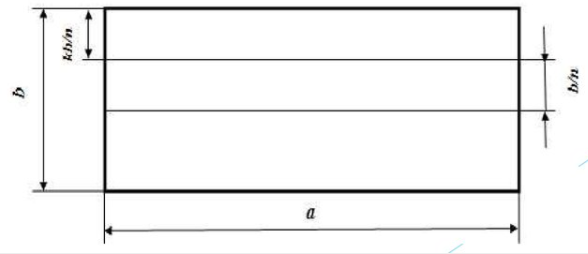
**Aplicarea limitei în fizică și geometrie:**

Suntem la curent cu aplicațiile teoriei limitelor în geometrie. De exemplu, aria unui cerc, volumul unui cilindru, un con și o bilă au fost determinate și apoi calculate ca limitele corespunzătoare. Să indicăm un alt mod de a utiliza conceptul de limită în rezolvarea problemelor, care se numește metoda însumării.

**Exemplu.** Determinați presiunea p produsă de apa care umple acvariul pe unul dintre pereții săi verticali, având o lungime a = 50 cm, o înălțime b = 30 cm.

**Rezolvare:** Conform legii lui Pascal, presiunea lichidului se răspândește în toate direcțiile în mod egal și este direcționată peste tot perpendicular pe suprafața vasului. Mărimea acestei presiuni pe platformă este egală cu greutatea coloanei de lichid, a cărei înălțime este egală cu adâncimea acestei platforme, iar baza este egală cu aria sa. În plus, dacă peretele este împărțit în benzi separate, atunci presiunea asupra întregului perete va coincide cu suma presiunilor pe aceste benzi. Vom folosi acest lucru pentru a rezolva problema.

Pentru a calcula presiunea pe peretele acvariului, împărțim înălțimea sa b în n părți egale și trasăm segmente paralele cu latura a prin punctele de diviziune. Ca rezultat, întregul perete al acvariului se va sparge în straturi orizontale subțiri sub formă de dreptunghiuri cu laturile a și .



Pentru un n suficient de mic, înălțimea stratului orizontal b este egală cu , va fi foarte mic și putem presupune că toate punctele stratului k sunt la aceeași adâncime, egală cu =k .

Atunci presiunea apei la al k strat aproximativ va fi egal:

Presiunea pe tot peretele acvariului va fi aproximativ egală cu: p

Valoarea adevărată a presiunii este considerată a fi limita acestei expresii la

,

adică presiunea apei pe peretele vertical este egală cu produsul suprafeței peretelui cu jumătate din înălțimea sa. Înlocuind presiunea, obținem p=22,50 kg.

**Aplicarea limitei în economie:**

Teoria limitelor este adesea utilizată în diferite calcule economice, de exemplu, la calcularea procentelor complexe. Practic, calculele practice utilizează un interes discret (calculat la o frecvență specifică). Timpul este o variabilă discretă. În unele cazuri, devine necesar să se aplice procente continue (de exemplu, pentru a demonstra calculele în care au loc procese continue). Să analizăm următoarea formulă:

S=P , unde P este suma inițială, i este rata dobânzii (fracție zecimală), S este suma care s-a format la sfârșitul împrumutului la sfârșitul anului n.

**Exemplu:** Găsiți un profit de la 30.000 USD, depuneți un depozit timp de 3 ani la 10% pe an, dacă la sfârșitul fiecărui an s-au adăugat dobânzi la depozit.

**Rezolvare:** Folosim formula pentru a calcula procentele compuse:

3000= 3000\*=39930 USD

În acest caz, profitul va fi egal:

39930-30000=9930 USD

**Răspuns:** 9930 USD

**5. Prezentați cum utilizați mijloacele TIC în studiul temei.**

**Calculați limita:**

;

Rezolvarea acestei limite manual, va fi în felul următor:

= = =

Cum va fi rezolvată această limită cu ajutorul softului Wolfram Mathematica:



**Calculați limita:**

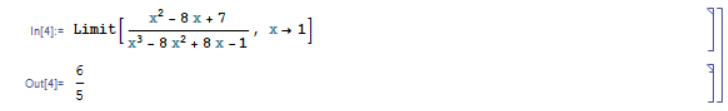
;

Rezolvarea acestei limite manual, va fi în felul următor:

= = =

= = = =

Cum va fi rezolvată această limită cu ajutorul softului Wolfram Mathematica:



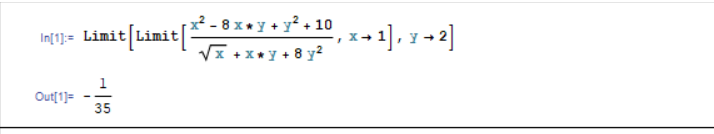
**Calculați limita:**

;

Rezolvarea acestei limite manual, va fi în felul următor:

= === -

Cum va fi rezolvată această limită cu ajutorul softului Wolfram Mathematica:



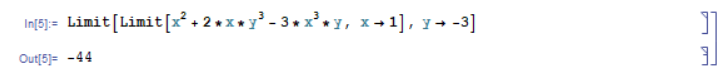
**Calculați limita:**

;

Rezolvarea acestei limite manual, va fi în felul următor:

==1-54-3\*1\*(-3)= -53+9=-44

Cum va fi rezolvată această limită cu ajutorul softului Wolfram Mathematica:



**Calculați limita:**

;

**Rezolvarea acestei limite manual, va fi în felul următor:**

Suntem în cazul când avem nedeterminare de .

Astfel dacă luăm polinomul de la numarator și încercăm să-l scriem ca produs de două polinoame, astfel încât să putem obține ceva care să ne ajute.

Notăm și obținem

, astefel am obținut o ecuație de gradul al doilea

𝝙=

Deci obținem

și

Deci putem scrie numărătorul astfel

()\*()

Acum limita devine

**Cum va fi rezolvată această limită cu ajutorul softului Wolfram Mathematica:**



**6. Formulați concluzii generale.**

Tema limitelor mi-a devenit cunoscută încă din liceu, începând cu clasa a XI-a. La liceu am studiat “Limita funcției de o singură variabilă reală”. Această temă după părerea mea a fost una dintre cele mai interesante teme. Când începusem să fac studiile la Universitatea de Stat din Tiraspol am cunoscut “Limita funcției de mai multe variabile reale”. Studiind acest curs, tema respectivă oricum lăsase în urma sa niște taine. Pentru a realiza practica de inițiere, am avut nevoie să mă informez din diverse surse suplimentare, am avut nevoie să recitesc temele studiate anterior, pentru ca să-mi pot forma unele idei și unele concluzii.

Am rămas plăcut surprinsă de faptul că în prezent avem la dispoziție diverse mijloace care pot să ne ajute la rezolvarea unor limite complicate, cum ar fi softul Wolfram Mathematica. Softul respectiv nu ne reprezintă rezolvarea exercițiilor, dar afișează doar răspunsul. Sunt de părerea că softul respectiv ne ajută mult, deoarece rezolvând un exercițiu manual, este posibil să comitem unele greșeli și să primim în final un răspun greșit. Pentru a omite acest fapt, putem apela la softul respectiv, pentru a cunoaște ce răspuns trebuie să primim în final.

Vorbind despre “Limita funcției de o singură variabilă reală” și despre “Limita funcției de mai multe variabile reale” aceastea au unele asemănări și unele deosebiri. Dacă să vorbim depsre deosebiri, primul ar fi chiar și fatul cum ele se notează. Așa este reprezentată limita funcției de o singură variabilă reală , iar limita funcției de mai multe variabile reale va fi reprezentată în felul următor . Al doilea ar fi faptul că limita funcției de o singură variabilă, analizează comportamentul lui  atunci când **x** se apropie de o valoare reală fixată **xo**. Pentru aceasta se presupune că  este definită pentru orice **x** care se apropie de **xo**. Iar limita funcției de mai multe variabile reale de exemplu avem: numărul A se numește limită a funcției în punctul , dacă pentru orice șir de puncte convergent către (), șirul respectiv de valori ale funcției converge către A.

Dacă să vorbim despre asemările lor, atunci una dintre acestea ar fi faptul că și Limita funcției de o singură variabilă reală și limita funcției de mai multe variabile reale sunt definite după Cauchy.

Practica de inițiere a avut un efect constructiv asupra mea, a fost pentru mine o experiență, ajutându-mă, în special, să dezvolt și să exersez cunoștințele acumulate.

**7. Bibliografie:**

* <https://ro.wikipedia.org/wiki/Limit%C4%83_a_unei_func%C8%9BiiNlkn>
* <https://ppt-online.org/71622>
* <http://mathprofi.ru/predel_funkcii_dvuh_peremennyh.html>
* <https://www.math.uaic.ro/~maticiuc/didactic/MSI_Seminar%205.pdf>
* <http://math.etc.tuiasi.ro/pg/cursuri/AM1LimiteDeFunctii.pdf>
* Bivol L. Bulat M. Lecții la analiza matematică, vol. II, Chișinău, Evrica, 2004.
* Șipaciov V.S. Matematică superioara. Lumina, Chișinău, 1992.
* <https://ro.wikibooks.org/wiki/Analiz%C4%83_matematic%C4%83/Limita_unei_func%C8%9Bii>